Análisis Matemático I. Primer curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación.

## HOJA 2

### Tema 1: Los números complejos. Conjugación y módulo. Representación polar. Desigualdad triangular.

**1.-** Demuéstrese que $|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\,w|$, para $z$, $w \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

**2.-** Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, y que la igualdad se tiene si y sólo si $|x| = |y|$.

**Ayuda:** Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$ (con igualdad sólo si $a = b$).

**3.-** Encuentre la parte real y la parte imaginaria de los siguiente números.

(1) $\dfrac{1}{z}\,,$ (2) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i}\,,$ (3) $\dfrac{1}{(3+2i)^2}\,.$

**4.-** Calcule los valores de

(1) $\sum_{k=1}^{2016} i^k$,

(2) $(1+i)^{14}$,

(3) $(1+i)^n + (1-i)^n$,

(4) $(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12})^{20}$,

(5) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}$.

**5.-** Compruebe la identidad $|1 + z\overline{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$, donde $z$, $w \in \mathbb{C}$.

**6.-** Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

(1) $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z| < 1\}$.

(2) $\{z \in \mathbb{C} : \quad 2 < |z| < 3, \quad \pi/4 < \arg z \leq 3\pi/2\}$.

(3) $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z - a| < |1 - a\overline{z}|\}$ con $a \in \mathbb{R}$, tal que $|a| < 1$.

**7.-** Demuestre las siguientes afirmaciones:

(1) Si $|z| = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{-\overline{(a/b)}\}$ se cumple

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1.$$

(2) Si $|a| < 1$, entonces $|z| < 1$ es equivalente a

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1.$$

**8.-** Demuestre que

$$\left(\frac{1+i\,\tan\theta}{1-i\,\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\,\tan(n\theta)}{1-i\,\tan(n\theta)},$$

para cualquier $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**9.-** Demuestre las siguientes afirmaciones:

(1) Si $z \neq 1$ entonces

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(2) Si $\omega \neq 1$ es una raíz $n$-ésima de la unidad, entonces

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = 0\,,$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

(3) $(*)$ Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\cos(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

y

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \ldots + \operatorname{sen}n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

**Ayuda:** Use el apartado (1) con $z = e^{i\theta}$.

**Comentario:** $(*)$ ejercicio difícil